PROPIEDADES DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

BRAYAN ANDRÉS RUBIO CANO
Código 070250172011

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA
IBAGUÉ
2018

PROPIEDADES DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

BRAYAN ANDRÉS RUBIO CANO
Código 070250172011

Trabajo de Grado para optar por el título de
Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística

Director
OCTAVIO MONTOYA MONTOYA
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA
IBAGUÉ
2018

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: PROPIEDADES DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

AUTORES: BRAYAN ANDRES RUBIO CANO (Código: 070250172011)

DIRECTOR: OCTAVIO MONTOYA MONTOYA

JURADOS: LEONARDO SOLANILLA
PABLO EMILIO CALDERON

CALIFICACIÓN: 4.1 (CUATRO UNO)

X APROBÓ ___ REPROBÓ

OBSERVACIONES: Sobresaliente

FIRMAS

LEONARDO SOLANILLA Jurado 1	PABLO EMILIO CALDERON Jurado 2
OCTAVIO MONTOYA MONTOYA Director del Trabajo	YURI MARCELA GARCÍA S. Directora del Programa

Ciudad y fecha: Ibagué, 2 de marzo de 2018

FORMULARIO PARA EVALUACIÓN DE TRABAJOS DE GRADO

HOJA No. 2

6. Calificación

PRIMER JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: Leonardo Solanilla

NOTA OTORGADA POR EL JURADO 4.2

FIRMA DEL JURADO ______________________

SEGUNDO JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: Pablo Emilio Calderon

NOTA OTORGADA POR EL JURADO 3.9

FIRMA DEL JURADO ______________________

PROMEDIO FINAL DE LA NOTA DEL TRABAJO DE GRADO: 4.1

7. RANGOS DE EQUIVALENCIA: (Acuerdo No. 030 de 2000 del Consejo de Facultad)

Calificación menor de tres cero (3.0)	REPROBADO
Calificación entre tres cero (3.0) y tres nueve (3.9)	APROBADO
Calificación entre cuatro cero (4.0) y cuatro cuatro (4.4.)	SOBRESALIENTE
Calificación entre cuatro cinco (4.5) y cuatro nueve (4.9)	MERITORIO
Calificación de cinco cero (5.0)	LAUREADO

FECHA DE SUSTENTACIÓN 02-07-2018

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La derivada fraccionaria surge en 1695 cuando Leibniz se pregunta de la posibilidad de hallar $D^p f(x)$, $p \in \mathbb{Q}$. Leibniz nació en 1646. Fue conocido como uno de los pensadores más grandes del siglo XVII y XVIII. Sus contribuciones a la ciencia fueron grandes, tanto que fue difícil saber cuantos manuscritos escribió.
En la metafisíca escribió su teoría de las mónadas, donde abarca un estudio sobre el comportamiento de éstas y su función en el universo. Por otra parte Leibniz es conocido por crear el cálculo infinitesimal junto con Newton, lo que ocasionó una disputa entre quién creó el cálculo. En 1695 le llega una carta a Leibniz de parte de Guillaume François Antoine, Marqués de L'$h\widehat{o}$pital con un argumento de lo que sería el primer paso al cálculo fraccionario. Respecto a las derivadas de orden n se dice lo siguiente:

¿Qué sucedería si n fuera 1/2?

A lo que Leibniz escribió:
*"Tal parece haberte dicho de mi mención hacia una analogia maravillosa, que hace posible decir que las sucesiones diferenciales están en progresión geométrica.
Uno puede preguntarse: ¿Qué sería una diferencial con exponente fraccionario? Ves que el resultado puede ser expresado a una serie infinita. Aunque esto parece tomado de la geometría del cual no se conocen exponentes fraccionales. Tal parece que un dia, estas paradojas producirán consecuencias muy útiles, ya que apenas hay paradojas sin utilidad. Ideas que dieron poco de sí pueden dar ocasión a algo más bello."*(ver W)
A partir de los trabajos de Newton y Leibniz se formalizó el concepto de derivada. Este concepto generalmente se nota como: $\frac{df}{dx} = Df$ donde f es una función diferenciable.
De allí surgen de forma natural las derivadas de orden superior, es decir esas son funciones continuas a las que se les pueden hallar $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\cdots$, $\frac{d^n f}{dx^n}$, donde $n \in \mathbb{N}$.
La existencia de estas derivadas fue muy importante en el desarrollo del cálculo. Ahora la inquietud es: ¿Qué es $\frac{d^p f}{dx}$, cuando p $\in \mathbb{R}$? Por ejemplo, que es : $D^{\frac{1}{2}} f$, $D^{-2} f$, $D^{\pi} f$, $D^{\sqrt{2}} f$, etc.
Un ejemplo ilustrativo es el siguiente.
Si $f(x) = sen(x)$, entonces podemos verificar fácilmente que $Df = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, análogamente $D^2 f = sen\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$, en general $D^n f = sen\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. Esto nos hace pensar

que $D^p f$ se podría definir como $D^p f = sen\left(x + \frac{p\pi}{2}\right), \forall p \in \mathbb{R}$.
¿En general, como podríamos definir $D^p f$? ¿Qué característica debe tener f?¿Es útil calcular $D^p f$?
En la literatura $D^p f$, $p \in \mathbb{R}$, se conoce como *derivada fraccionaria.*
En 1730, L Euler hizo referencia a interpolaciones entre órdenes enteros de una derivada. En 1812, P S Laplace definió una derivada fraccional, pero la primera discusión de una derivada de este tipo apareció en 1819 en dos páginas de las que constituyen el texto de Cálculo de S F Lacroix, quien aparentemente consideró este tema como un mero ejercicio matemático.
En 1822, J B J Fourier hizo mención de las derivadas fraccionales, pero de la misma forma que hicieron anteriormente Euler, Laplace y Lacroix, no aportó ninguna aplicación.
La primera aplicación surgió de la mano del matemático Niels Henrik Abel, en 1823, cuando aplicó el Cálculo fraccionario en la solución de una integral que surgió en la formulación del problema de la tautócrona. Este problema llamado a veces el problema de la isocrona, consiste en encontrar la forma de la curva sobre un plano vertical, de tal forma que un objeto, al deslizarse por ella sin rozamiento alguno, llegue al final de su recorrido en un tiempo que es independiente del lugar en que comience el movimiento, es decir dos objetos situados en la curva, uno situado a más altura que el otro, recorren la curva en el mismo tiempo.
La "elegancia" de la solución de Abel para este problema llamó la atención de J Liouville, a quien probablemente le debemos históricamente la primera definición formal lógica del concepto de derivada fraccionaria, desarrollado en la publicación de sus tres largas memorias en 1832 y alguna más en 1855.
Entre 1835 y 1850 algunos investigadores como G Peacock, tomando como referencia a Lacroix,P Kelland y Liouville, fundamentaron ciertas controversias respecto a las definiciones de derivada fraccionaria argumentadas de forma independiente por uno y otro. Sin embargo otros como A Demorgan consideraron que ni una ni otra corriente tenían por que entrar en conflicto, ya que ambas formas de definir las derivadas fraccionarias podían ser parte de una más general.
En 1850, W Center observó que la discrepancia entre ambas corrientes se centraba fundamentalmente en el concepto de derivada fraccionaria de una constante. De acuerdo con la versión de Peacock-Lacroix, la derivada fraccional de una constante da un resultado distinto de cero, a menos que la constante sea precisamente cero, mientras que en la versión de Kelland-Liouville, la derivada fraccionario de una constante da como resultado cero, puesto que $\Gamma(0) = \infty$ y por lo tanto $\frac{1}{\Gamma(0)}$ puede considerarse como cero.
En 1847, durante sus días de estudiante, B Riemann desarrolló una teoría de operaciones fraccionales, que fue publicada tras su muerte en 1876. Riemann usó una generalización de una serie de Taylor para deducir su fórmula para integración de orden arbitrario

$$\frac{d^{-v}}{dx^{-v}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt + \Psi(x).$$

Esta última expresión sobre la que Cayley comentó en 1880 que la función complementaria $\Psi(x)$ es de naturaleza indeterminada, contiene una infinidad de constantes arbitrarias.

Los matemáticos de la primera mitad del siglo XIX no pudieron precisar una definición apropiada al no analizar en el plano complejo las consecuencias de sus definiciones.
Con la llegada del siglo XX y los desarrollos del análisis matemático y de la teoría de funciones, surgieron nuevas formas íntegro-diferenciales fraccionarias.
En 1936, M Riesz consideró la integral fraccionaria de múltiples variables como un operador de tipo potencial. Uno de estos potenciales ha sido formalmente definido como la potencia $(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}$ del laplaciano.
Por otro lado, el académico español D Maravall con una serie de publicaciones que aparecieron a partir del año 1959, muchas acerca de la ingeniería de las oscilaciones, fue el primero en España en mencionar unas particulares oscilaciones fraccionarias asociadas a ecuaciones diferenciales no enteras.
En 1967, el físico matemático Michele Caputo dio una nueva definición de derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los cada vez más numerosos problemas aplicados que se estaban estudiando.
En el año 1974, tuvo lugar en Connecticut (Estados Unidos), la primera conferencia internacional sobre el Cálculo Fraccionario, que sirvió de estímulo a numerosas publicaciones. La segunda conferencia tuvo lugar en 1984 en Escocia y la tercera en 1989 en Tokyo.
Actualmente es difícil encontrar un ámbito de la ciencia o de la ingeniería que no considere conceptos del Cálculo Fraccionario, y cada año tienen lugar varios acontecimientos que lo ponen de manifiesto.
Desde el punto de vista de la matemática, es fascinante ver como el campo de las generalizaciones "fraccionarias" es lugar de encuentro de varias disciplinas, entre otras, la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones integro-diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico.
De relevante importancia son las aplicaciones físicas en la teoría de la viscoelasticidad, en el estudio del fenómeno de la difusión anómala y en la teoría electromagnética; pero podemos anticipar que también se va despertando un interés cada vez mayor en otros ámbitos muy distintos como, por ejemplo, el de la teoría de circuitos, de la biología o de la física de la atmósfera. Así mismo, entre los economistas se va consolidando el empleo de conceptos de Cálculo Fraccionario (Para más información ver [19] y [10]).
El propósito de este trabajo es estudiar las propiedades básicas de la Derivada fraccionaria y mostrar algunos ejemplos ilustrativos donde se aplique esta derivada. El trabajo está distribuido así: En el capítulo 2, daremos un repaso al concepto de la función gama con propiedades y ejemplos, además estudiaremos las derivadas fraccionarias partiendo del teorema fundamental del cálculo **(TFC)**, junto con la definición dada por Lacroix para hallar derivadas para monomios con exponente real. También mostraremos por inducción la derivada fraccionaria del producto. En el capítulo 3, se mostrarán contrucciones de derivadas fraccionarias tales como la derivada Grunwald y E L post y la derivada de Riemann-Liouville. En el capítulo 4, se muestran algunas aplicaciones de la derivada fraccionaria como el problema de tautócrona y la ecuación de calor. En el capítulo 5 se presentan las conclusiones y observaciones.

Capítulo 2

Preliminares

El inicio del estudio de la derivada fraccionaria surge al generalizar el teorema del binomio, mediante la función Gama. De aquí estudiaremos en detalle esta función.
Sea

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (2.1)\\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} y^k \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)} x^{n-k} y^k.
\end{aligned}
$$

Si reemplazamos n por p con $p \in \mathbb{R}$ tenemos el siguiente teorema
Teorema 2.1. *Sea* $p \in \mathbb{R}$

$$
(x+y)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)\Gamma(k+1)} y^{p-k} x^k.
$$

¿Por qué $\sum_{k=0}^{\infty}$*?*

Demostración. Sea $f(x) = (x+y)^p$, donde consideramos a y como una constante. Sabemos que $f \in C^{\infty}\mathbb{R}$ es decir $f$es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces podemos escribir f en una serie de Taylor en $x_0 = 0$.
Por lo tanto

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(0)(x-x_0)^k}{k!}
$$

Ahora como:

$$
\begin{aligned}
D^0 f(0) &= y^p \\
D^1 f(0) &= p y^{p-1} \\
D^2 f(0) &= p(p-1) y^{p-2} \\
&\vdots \\
D^k f(0) &= p(p-1)(p-2)\cdots(p-k)(p-k+1) y^{p-k}.
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que

$$f(x) = y^p + \frac{p y^{p-1} x}{1!} + \frac{p(p-1) y^{p-2} x^2}{2!} + \cdots + p(p-1)\cdots(p-k)(p-k+1) y^{p-k} \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Se puede ver facilmente que $p(p-1)\cdots(p-k)(p-k+1) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)}$.
Así la función $f(x)$ toma la forma

$$f(x) = y^p + \frac{p y^{p-1} x}{1!} + \frac{p(p-1) y^{p-2} x^2}{2!} + \cdots + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)\Gamma(k+1)} y^{p-k} x^k + \cdots$$

En ambos casos, concluimos que:

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^{p-k} y^k, \quad \text{donde } \tfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)\Gamma(k+1)}$$

$\square$

Esta identidad es una generalización del teorema del Binomio. Por ejemplo, si $p = 2$, entonces tenemos que:

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} xy + \binom{2}{2} y^2 + \binom{2}{3} x^{-1} y^3 + \binom{2}{4} x^{-2} y^4 + \cdots$$

Notemos que $\dbinom{2}{k}$ con $k > 2$ es 0.
En efecto

$$
\begin{aligned}
\binom{2}{k} &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2-k+1)\Gamma(k+1)} \\
&= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-k)\Gamma(k+1)} \\
&= \frac{\Gamma(3)}{(2-k)\Gamma(2-k)\Gamma(k+1)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Note que

$$\begin{aligned}\binom{2}{3} &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2-3+1)\Gamma(4)} \\ &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(0)\Gamma(4)} \\ &= \frac{\Gamma(3)}{(\infty)\quad\Gamma(4)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

En general, tenemos que $\Gamma(p) = \infty$ si $p \leq 0$, entonces.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

2.1. La función Gama

La función Gama es de gran utilidad en el cálculo de algunas derivadas fraccionarias, por ello necesitamos recordar algunas de sus propiedades, las cuáles son necesarias en el ejemplo que veremos más adelante.

Definición 2.1. *Sea $z \in \mathbb{R}$, con $z > 0$, definimos la integral*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{2.2}$$

Lo anterior se conoce como la función Gama y se denota por el simbolo Γ.
Para probar la convergencia usamos el siguiente teorema de comparación (ver[4]).

Teorema 2.2. *Si las dos integrales propias $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ existen para cada $b \geq a$ siendo $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, y si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \quad \text{donde } c \neq 0$$

entonces las integrales $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ o convergen o divergen.

Procedemos de la siguiente forma :

Tomemos ahora la integral $\displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$ de tal manera que sea la suma de 2 integrales:

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt.$$

Para $\displaystyle\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$, aplicamos el teorema(2.2) con la integral $\displaystyle\int_1^\infty t^{-2}\, dt$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{z-1}e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{z+1}}{e^t}.$$

Como tenemos una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ aplicamos L'h$\widehat{o}$pital hasta que el exponente de t sea negativo. Esto hace que el termino $\dfrac{t^{z+1}}{e^t}$ quede de la forma $\dfrac{kt^m}{e^t}$ con $m < 0$, $k \neq 0$. Es decir, el limite queda de la forma $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^{z+1}}{e^t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{k}{e^t t^{-m}} = 0$.

Como el limite dá 0, entonces podemos concluir que la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ depende de la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} t^{-2}\,dt$ que es convergente, así decimos que la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ es convergente.

Para la integral $\displaystyle\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt$ hacemos un cambio de variable: $t = \frac{1}{u}$ de donde $dt = -\frac{1}{u^2}du$. Así,

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt &= \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{u}\right)^{z-1} e^{\left(\frac{-1}{u}\right)} \left(-\frac{du}{u^2}\right)\\ &= -\int_1^{\infty} u^{-z-1}e^{\left(\frac{-1}{u}\right)}du.\end{aligned}$$

Usando de nuevo el teorema (2.2) con $\displaystyle\int_1^{\infty} u^{-z-1}\,du$ que es convergente, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty} \frac{e^{\left(\frac{-1}{u}\right)}u^{(-z-1)}}{u^{(-z-1)}} &= \lim_{u\to\infty} e^{\left(\frac{-1}{u}\right)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Como el limite anterior tiende a 1, decimos que existe. Así la $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt$ converge. Por lo tanto, como las 2 integrales convergen, entonces afirmamos que la función Gama es convergente.

La función Gama tiene una propiedad que nos será muy útil en este trabajo.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ \forall z > 0.$$

En efecto, aplicando la definición (2.2), procedemos de la siguiente manera:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{(z+1)-1}\,dt.$$

Usando la integración por partes tenemos: $u = t^z$, $\quad du = zt^{z-1}dt$, $\quad v = -e^{-t}$.
Luego,

$$\Gamma(z+1) = \left[\frac{-t^z}{e^t}\right]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

Para la expresión $\left[\dfrac{-t^z}{e^t}\right]_0^\infty$ recurrimos a la regla de L'h$\widehat{o}$pital.

Para el limite superior lo hacemos por casos:

<u>*Caso*</u> 1: Si $0 < z < 1$, entonces aplicando L'h$\widehat{o}$pital tenemos:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{zt^{z-1}}{e^t} = z \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t t^{1-z}} = 0.$$

<u>*Caso*</u> 2: Si $z \geq 1$ aplicamos L'h$\widehat{o}$pital hasta que el exponente de t sea negativo. Así:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{zt^{z-1}}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z+r)t^{z-r-1}}{e^t},$$

donde $z - r - 1 < 0$.

Así, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^z}{e^t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{k}{e^t t^m} = 0$, donde $k = z(z-1)\cdots(z-r)$ y $m = z - r - 1$.

En cualquier caso $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{-t^z}{e^t} = 0$.

Ahora para el limite inferior es evidente que $\dfrac{-0^z}{e^0} = 0$.

Por lo tanto $\left[\dfrac{-t^z}{e^{-t}}\right]_0^\infty = 0$.

Así,

$$\Gamma(z+1) = z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

Luego,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Si $z \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\
&= z(z-1)\Gamma(z-1) \\
&= z(z-1)(z-2)\Gamma(z-2) \\
&= \cdot \\
&= \cdot \\
&= \cdot \\
&= z(z-1)(z-2)\cdots 2\cdot 1 \\
&= z!
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Gamma(z+1) = z!, \quad \forall z \in \mathbb{Z}^+$.
En general es difícil cálcular $\Gamma(z)$, cuando $z \in \mathbb{Q}^+$. La famosa *integral de Gauss*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.3}$$

es útil para cálcular algunos valores de $\Gamma(z)$, por ello incluimos la prueba de esta identidad.
Para ello consideremos la siguiente integral doble

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \tag{2.4}$$

Usando coordenadas polares, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{donde} \quad dxdy = rdrd\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \infty.$$

Así, (2.4) toma la forma:

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} rdrd\theta = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} rdr.$$

Haciendo el cambio de variable: $u = -r^2$ tenemos que $du = -2rdr$ y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= 2\pi \int_0^{-\infty} e^u \left(\frac{-du}{2} \right) \\ &= -\pi \int_0^{-\infty} e^u du \\ &= -\pi [e^{-\infty} - e^0] \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right). \end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi.$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Como la función e^{-x^2} es par, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Por tanto

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Mostremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Calcular $\Gamma(1)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\
&= -e^{-t} \big|_0^{\infty} \\
&= -e^{-\infty} + e^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Calcular $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable: tenemos que, $u = t^{\frac{1}{2}}, u^2 = t$ y $2du = t^{-\frac{1}{2}} dt$.

Así,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Ejemplo 3. Calcular $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

Nota. Sabemos que $\Gamma(s)$ existe si, $s > 0$.
Si $s \leq 0$ se puede verificar que la integral.

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt,$$

diverge.
Es decir $\Gamma(s)$ no existe si $s \leq 0$, sin embargo $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. De donde, $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$.

Notemos que $\Gamma(s+1)$ existe, si $(s+1) > 0$. Lo anterior, nos permite definir $\Gamma(s)$ cuando $-1 < s < 0$.

Definición 2.2. *Si* $-1 < s < 0$ *entonces* $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$.

Análogamente,

$$\Gamma(s+1) = \frac{\Gamma(s+2)}{s+1}.$$

Aquí, $\Gamma(s+2)$ existe si, $s > -2$.
Definición 2.3. *Si* $-2 < s < -1$, *entonces*

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)}.$$

Continuando de esa manera, se puede extender la definición de $\Gamma(s)$, inductivamente para cada intervalo abierto $-n < s < -n+1$, donde n$\in \mathbb{Z}$. Ahora, si definimos $\Gamma(0) = 1$, entonces podemos definir mediante la identidad $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ la función $\Gamma(s)$ para $s \in \mathbb{R}^-$. En general se puede generalizar $\Gamma(s), \forall s \in \mathbb{R}$.

2.2. Derivada entera

Es conocido que:

$$D \equiv \frac{d}{dx}.$$

Por el Teorema Fundamental del Calculo (T.F.C) sabemos que:

$$D \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x), \tag{2.5}$$

$$\int_a^x Df(\xi) d\xi = f(x) - f(a). \tag{2.6}$$

De la identidad (2.5), podemos definir

$$D^{-1} f(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi. \tag{2.7}$$

Se puede verificar que:

$$D \cdot D^{-1} f(x) = f(x).$$

En efecto,

$$D \cdot D^{-1} f(x) = D \left(\int_a^x f(\xi) d\xi \right).$$

Por (2.5) tenemos

$$D \cdot D^{-1} f(x) = f(x).$$

Teorema 2.3. $D^n D^{-n} f(x) = f(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Tomemos $n = 1$, entonces

$$\begin{aligned} DD^{-1} f(x) &= D \left(\int_a^x f(\xi) d\xi \right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Supongamos que $D^n D^{-n} f(x) = f(x)$.

Mostremos que $D^{n+1} D^{-(n+1)} f(x) = f(x)$.

En efecto

$$\begin{aligned} D^{n+1} D^{-n-1} f(x) &= D^{n+1} D^{-1-n} f(x) \\ &= D^n [DD^{-1} (D^{-n} f(x))] \\ &= D^n D^{-n} f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D^n D^{-n} f(x) = f(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

□

Por otro lado, $D^{-1} \cdot Df(x) = f(x) - f(a)$. En efecto,

$$\begin{aligned} D^{-1} \cdot Df(x) &= D^{-1}\left(Df(x)\right) \\ &= \int_a^x Df(x)dx. \end{aligned}$$

Por (2.6)

$$D^{-1} \cdot Df(x) = f(x) - f(a).$$

Podemos notar que D^{-1} es el operador inverso a derecha de D, pero no es operador inverso a izquierda. Si se supone que $f(a) = 0$, entonces D^{-1} es el operador inverso de D. [20]

Podemos definir: $D^{-2}f(x) = D^{-1}(D^{-1}f(x))$. De donde

$$\begin{aligned} D^{-2}f(x) &= D^{-1}(D^{-1}f(x)) \\ &= D^{-1}\left(\int_a^x f(\xi)d\xi\right). \end{aligned}$$

Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(\xi)d\xi$. Entonces,

$$\begin{aligned} D^{-2}f(x) &= D^{-1}(F(x)) \\ &= \int_a^x F(\xi')d\xi'. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$D^{-2}f(x) = \int_a^x \int_a^{\xi'} f(\xi)d\xi d\xi'.$$

Análogamente, se verifica que:

$$D^{-3}f(x) = \int_a^x \int_a^{\xi'} \int_a^{\xi''} f(\xi)d\xi d\xi' d\xi''.$$

Continuando con este proceso, tenemos que:

$$D^{-n}f(x) = \int_a^x \int_a^{\xi'} \cdots \int_a^{\xi^n} f(\xi)d\xi d\xi' \cdots d\xi^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Una aplicación sencilla de lo anterior es:
Sea el problema de Cauchy.

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x) = g(x), \quad \text{donde } g(x) \text{ es integrable} \\ \quad f'(a) = 1 \\ \quad f(a) = 1. \end{array} \right.$$

Tenemos que:

$$D^2 f(x) = g(x).$$

Multiplicando D^{-1} a ambos lados de la igualdad se tiene que

$$D^{-1}D^2 f(x) = D^{-1}g(x).$$

Usando (2.7), tenemos:

$$\int_a^x D(Df(\xi))d\xi = \int_a^x g(\xi)d\xi.$$

Luego por (2.6), tenemos

$$Df(x) - f'(a) = \int_a^x g(\xi)d\xi.$$

Luego,

$$Df(x) = f'(a) + \int_a^x g(\xi)d\xi.$$

De nuevo multiplicando por D^{-1}, obtenemos

$$D^{-1}Df(x) = D^{-1}f'(a) + D^{-1}\int_a^x g(\xi)d\xi.$$

Así,

$$\int_a^x Df(\xi)d\xi = \int_a^x f'(a)d\xi + \int_a^x \int_a^{\xi'} g(\xi)d\xi d\xi'.$$

Recordemos que $\int_a^x Df(\xi)d\xi = f(x) - f(a)$. Así,

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^{\xi'} g(\xi)d\xi d\xi'.$$

Luego,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^{\xi'} g(\xi)d\xi d\xi'.$$

Como $f(a) = 1$ y$f'(a) = 1$, entonces la solución al problema de Cauchy es

$$f(x) = 1 + (x-a) + \int_a^x \int_a^{\xi'} g(\xi)d\xi d\xi'.$$

Notese que la función $g(x)$ sólo necesita ser integrable.

Mostremos un ejemplo de derivada entera negativa. Hallemos $D^{-2}(\sqrt{x})$.

Por las propiedades, tenemos que

$$D^{-2}(\sqrt{x}) = \int_a^x \int_a^{\xi'} (\sqrt{\xi}) d\xi d\xi', \quad a > 0, \quad x, \xi' > a$$

Haciendo los cálculos, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^{\xi'} (\sqrt{\xi}) d\xi &= \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \left((\xi')^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} D^{-2}(\sqrt{x}) &= \int_a^x \frac{2}{3} \left((\xi')^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right) d\xi' \\ &= \frac{2}{3} \int_a^x \left((\xi')^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right) d\xi' \\ &= \frac{2}{3} \left(\int_a^x (\xi')^{\frac{3}{2}} d\xi' - \int_a^x a^{\frac{3}{2}} d\xi' \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} (\xi')^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_a^x \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}} x + a^{\frac{5}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}} x + \frac{3}{5} a^{\frac{5}{2}} \right). \end{aligned}$$

Luego,

$$D^{-2}(\sqrt{x}) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}} x + \frac{3}{5} a^{\frac{5}{2}} \right).$$

Algunas propiedades son:
Teorema 2.4. *Sea* $f \in C^\infty[a,b]$ *y* ${}_aD_x = D$, *donde* ${}_aD_x = \int_a^x$ *en el caso que la derivada entera sea negativa. Entonces:*

1. $D^n D^m f(x) = D^{n+m} f(x)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$
2. $D^{n+m} D^{-m} f(x) = D^n f(x)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$
3. $D^m D^{-n-m} f(x) = D^{-n} f(x)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$

4. $D^n D^{-m} f(x) = D^{n-m} f(x)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n > m$.

Demostración.

1. Es evidente.

2.

$$\begin{aligned} D^{n+m} D^{-m} f(x) &= D^n D^m D^{-m} f(x) \\ &= D^n (D^m D^{-m}) f(x) \\ &= D^n f(x). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} D^m D^{-m-n} f(x) &= D^m D^{-m-n} f(x) \\ &= (D^m D^{-m}) D^{-n} f(x) \\ &= D^{m-m} D^{-n} f(x) \\ &= D^{-n} f(x). \end{aligned}$$

4. Como $n > m$, entonces $n = m + r$, donde $r = n - m$. Así,

$$\begin{aligned} D^n D^{-m} f(x) &= D^{m+r} D^{-m} f(x) \\ &= D^{r+m} D^{-m} f(x) \\ &= D^r (D^m D^{-m}) f(x) \\ &= D^r D^{m-m} f(x) \\ &= D^r f(x) \\ &= D^{n-m} f(x). \end{aligned}$$

□

Notemos que:

$$\begin{aligned} D^{-2} D f(x) &= D^{-1} D^{-1} D f(x) \\ &= D^{-1} (D^{-1} D f(x)) \\ &= D^{-1} \int_a^x D f(\xi) d\xi \\ &= D^{-1} (f(x) - f(a)) \\ &= \int_a^x (f(\xi) - f(a)) d\xi \\ &= D^{-1} f(x) - f(a)(x - \xi). \end{aligned}$$

Es decir $D^{-2} D \neq D^{-1}$. Lo cual indica que en general $D^n D^m \neq D^{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$. La igualdad se obtiene si y solo si $f(a) = 0$.

2.3. Derivada para monomios con exponente real

Sea $f(x) = x^p$, donde $p \in \mathbb{Z}^+$, $p > 0$. Luego,

$$D^n x^p = p(p-1)\cdots(p-n+1)x^{p-n}.$$

Como $p(p-1)\cdots(p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}$, entonces.

$$D^n x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} x^{p-n}.$$

De la anterior motivación la siguiente definición.
Definición 2.4. *Sean $p, m \in \mathbb{R}$ tal que $p - m > 0$, $p + 1 > 0$, $p - m + 1 > 0$. La derivada fraccionario D^m de la función $f(x) = x^p$ es:*

$$D^m x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} x^{p-m}. \tag{2.8}$$

Ejemplo. Hallemos $D^{1/2}(x^{1/2})$.

Aplicando (2.8), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} D^{1/2}(x^{1/2}) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} x^0 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

2.4. Derivada fraccionaria del producto.

Sean f y g con derivadas de orden $n \geq 1$. Sabemos que

$$D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg).$$

Análogamente, derivando f, g con $n \geq 2$,

$$D^2(f \cdot g) = (D^2 f) \cdot g + 2(Df)(Dg) + f \cdot (D^2 g).$$

En general se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Si $n \in \mathbb{N}$ y f,g son funciones con derivadas de orden n, entonces :*

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k} f)(D^k g). \tag{2.9}$$

Demostración. Aplicando inducción matemática, suponemos que (2.9) es verdadero. Mostremos que:

$$D^{n+1}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (D^{n+1-k} f)(D^k g).$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (D^{n+1-k} f)(D^{n+1} f)g = (D^{n+1} f)g &+ \binom{n+1}{1}(D^n f)(Dg) \\
&+\binom{n+1}{2}(D^{n-1} f)(D^2 g) \\
&+\binom{n+1}{3}(D^{n-2} f)(D^3 g) \\
&+\cdots+\binom{n+1}{n-1}(D^2 f)(D^{n-1} g) \\
&+\binom{n+1}{n}(Df)(D^n g)
\end{aligned}$$

Como $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k}^{n+1} \binom{n+1}{k} (D^{n+1-k} f)(D^k g) = \binom{n}{0}(D^{n+1} f)g &+ \binom{n}{1}(D^n f)(Dg) \\
&+ \binom{n}{0}(D^n f)(Dg) + \binom{n}{2}(D^{n-1} f)(D^2 g) \\
&+ \binom{n}{1}(D^{n-1} f)(D^2 g) + \binom{n}{3}(D^{n-2} f)(D^3 g) \\
&+ \binom{n}{2}(D^{n-2} f)(D^3 g) + \cdots + \binom{n}{n}(Df)(D^n g) \\
&+ \binom{n}{n-1}(Df)(D^n g) + f(D^{n-1} g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k}^{n+1}\binom{n+1}{k}(D^{n+1-k}f)(D^kg) &= \binom{n}{0}\left[(D^{n+1}f)(g)+(D^nf)(Dg)\right]\\ &+\binom{n}{1}\left[(D^nf)(Dg)+(D^{n-1}f)(D^2g)\right]\\ &+\binom{n}{2}\left[(D^{n-1}f)(D^2g)+(D^{n-2}f)(D^3g)\right]\\ &+\cdots+\binom{n}{n-1}\left[(D^2f)(D^{n-1}g)+(Df)(D^ng)\right]\\ &+\binom{n}{n}\left[(Df)(D^ng)+f(D^ng)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k}^{n+1}\binom{n+1}{k}(D^{n+1-k}f)(D^kg) &= \binom{n}{0}D\left[(D^nf)(g)\right]+\binom{n}{1}D\left[(D^{n-1}f)(Dg)\right]\\ &+\binom{n}{2}D\left[(D^{n-2}f)(D^2g)\right]\\ &+\cdots+\binom{n}{n-1}D\left[(Df)(D^{n-1}g)\right]+\binom{n}{n}D\left[f(D^ng)\right]\\ &= D\left[\binom{n}{0}(D^nf)g+\binom{n}{1}(D^{n-1}f)(Dg)\right.\\ &+\binom{n}{2}(D^{n-2}f)(D^2g)\\ &\left.+\cdots+\binom{n}{n-1}(Df)(D^{n-1}g)+\binom{n}{n}(f)(D^ng)\right].\end{aligned}$$

Por (2.9) concluimos que,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(D^{n+1-k}f)(D^kg)=D\left(D^n(fg)\right)=D^{n+1}(fg).$$

$\square$

Sabemos que,

$$\binom{n}{k}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)}.$$

Luego, la identidad (2.9) se puede generalizar , para $p\in\mathbb{R}^+$, así:

$$D^p(f\cdot g)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)\Gamma(k+1)}(D^{p-k}f)D^kg,$$

donde se supone que se conoce a priori las derivadas fraccionarias $D^{p-k}f$.

Por ejemplo se puede deducir fácilmente que :

$$D^{\alpha}(sen(x)\cdot cos(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)} sen\left(x+\frac{\alpha-k\pi}{2}\right) cos\left(x+\frac{\alpha-k\pi}{2}\right).$$

Capítulo 3

Hacia una primera generalización de derivada fraccionaria

El propósito de este capítulo es construir la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (ver [20]).
Por serie de Taylor sabemos que si $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ entonces f tiene una representación en series de potencia en $x_0 \in \mathbb{R}$ de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Particularmente para $f(x) = e^x$ la serie de Taylor en $x_0 = 0$ es :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La función exponencial se ha generalizado en distintos contextos de la matemática, particularmente en *Análisis Funcional*, se define $e^{\alpha T}$ como

$$e^{\alpha T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n T^n}{n!}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, y T es un operador acotado y T^n corresponde a la composición k-ésima del operador T.
Es probable que un operador no acotado sea acotado en una vecindad de algún punto de $x_0 \in D(T)$, donde $D(T)$ es el dominio con respecto al operador T. Esto nos permite escribir la serie Taylor en forma local.
Por ejemplo, el operador diferencial $D : C_{[a,b]} \to \mathbb{C}$ no es acotado, pero es posible que en un subconjunto $V \subset C_{[a,b]}$ sea acotado.
Supongamos que $e^{\alpha D}$ es acotado en $V = C^{\infty}_{[a,b]} \subset C_{[a,b]}$. Luego $e^{\alpha D}$ existe. esto significa que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n D^n}{n!}$ converge.

Así, para $f \in V \subset C_{[a,b]}$ tenemos que:

$$e^{\alpha D} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n D^n f(x)}{n!}. \tag{3.1}$$

Por otro lado, como $f \in C^{\infty}_{[a,b]}$ entonces:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{Converge} \quad \forall x_0 \in [a, b].$$

Así, $f(x + \alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(x_0)(x + \alpha - x_0)^n}{n!}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $x_0 = x$ tenemos:

$$f(x + \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(x)\alpha^n}{n!}.$$

De (3.1) tenemos que:

$$f(x + \alpha) = e^{\alpha D} f(x). \tag{3.2}$$

Ahora,

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x + h)}{-h}.$$

Si $H = -h$ entonces

$$Df(x) = \lim_{H \to 0} \frac{f(x) - f(x - H)}{H}.$$

Por (3.2) tenemos

$$Df(x) = \lim_{H \to 0} \frac{f(x) - e^{-HD} f(x)}{H}.$$

Luego,

$$Df(x) = \lim_{H \to 0} \frac{(I - e^{-HD}) f(x)}{H}.$$

De esta identidad de deduce que el operador diferencial D está definido en forma explícita como:

$$D = \lim_{H\to 0} \frac{(I - e^{-HD})}{H}.$$

Así,

$$D^n = \lim_{H\to 0} \frac{(I - e^{-HD})^n}{H^n}.$$

Luego,

$$D^n f(x) = \lim_{H\to 0} \frac{[(I - e^{-HD})^n] f(x)}{H^n}. \tag{3.3}$$

Aplicando el Teorema del binomio (2.1) es fácil ver que:

$$\begin{aligned} D^n f(x) &= \lim_{H\to 0} \frac{1}{H^m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} e^{-kHD} f(x) \\ D^n f(x) &= \lim_{H\to 0} \frac{1}{H^m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)} e^{-kHD} f(x). \end{aligned}$$

Ahora como $e^{-kHD} f(x) = f(x - kH)$ entonces,

$$D^n f(x) = \lim_{H\to 0} \frac{1}{H^m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)} f(x - kH).$$

Esta fórmula se puede generalizar para $\alpha \in \mathbb{R}^+$ así:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{H\to 0} \frac{1}{H^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)} f(x - nH). \tag{3.4}$$

Mostremos un ejemplo sencillo aplicando la identidad (3.4).
Cálculemos $D(x^2)$ aquí $\alpha = 1$ y $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} D^1 f(x) &= \lim_{H\to 0} \frac{1}{H} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-n)\Gamma(n+1)} f(x - nH) \right] \\ &= \lim_{H\to 0} \frac{1}{H} \left[f(x) - f(x-H) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-n)\Gamma(n+1)} f(x - nH) \right]. \end{aligned}$$

Se puede verificar que $\Gamma(2-n)=\infty$, cuando $n\geq 2$.

Así,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(2-n)\Gamma(n+1)}f(x-nH)=0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
D^1 f(x) &= \lim_{H\to 0}\frac{f(x)-f(x-H)}{H}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x^2)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}2x+h=2x.
\end{aligned}$$

Ahora cálculemos $D^2(x^2)$, donde $\alpha=2$ y $f(x)=x^2$.

$$\begin{aligned}
D^2(x^2) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}\right]\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{x^2-2(x-h)^2+(x-2h)^2}{h^2}\right]\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{x^2-2(x^2-2xh+h^2)+(x^2-4xh+h^2)}{h^2}\right]\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{x^2-2x^2+4xh+4h^2+x^2-4xh+h^2}{h^2}\right]\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{2h^2}{h^2}\right]=\lim_{h\to 0}2=2.
\end{aligned}$$

En general la identidad (3.4) podría ser muy complicada. Es nuestro propósito hallar fórmulas más versátiles para hallar la derivada fraccionaria.
Recordemos que

$$Df(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{I-e^{-hD}}{h}f(x)\right).$$

Así, el operador D se puede definir como:

$$D=\lim_{h\to 0}\left(\frac{I-e^{-hD}}{h}\right).$$

De forma natural, tenemos que

$$\begin{aligned}
D^m &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{I-e^{-hD}}{h}\right)^m.\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^m}\left[I-me^{-hD}+\frac{m(m-1)e^{-2hD}}{2!}+\cdots\right].
\end{aligned}$$

Notemos que:

$$D^{-1} = \lim_{h\to 0} h\left[I + e^{-hD} + e^{-2hD} + \cdots\right].$$

Luego,

$$D^{-1}f(x) = \lim_{h\to 0} h\left[f(x) + f(x)e^{-hD} + f(x)e^{-2hD} + \cdots\right].$$

Como $e^{\alpha D}f(x) = f(x+\alpha)$ entonces,

$$\begin{aligned}
D^{-1}f(x) &= \lim_{h\to 0} h\left[f(x) + f(x)f(x+h) + \cdots + f(x)f(x+kh) + \cdots\right], \quad \alpha = 0\\
D^{-1}f(x) &= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} f(x-kh)h.
\end{aligned}$$

Podemos notar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(x-kh)h$ corresponde a un suma de *Riemann*, donde,

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} f(x-kh)h = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Notemos que si $a = -\infty$ entonces

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi =_{\infty} D_x^{-1}f(x).$$

Luego,

$$D^{-1}f(x) = \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} f(x-kh)h = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi =_{-\infty} D_x^{-1}.$$

Ahora hacemos $h = \frac{x-a}{N}$, donde $a < x$, luego $h \to 0$ entonces, $N \to \infty^{+}$.
Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
D^{-1}f(x) &= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} f(x-kh)h.\\
&= \lim_{h\to 0^{-}}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(x - k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right)\frac{x-a}{N}.\\
&= \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi =_{a} D_x^{-1}f(x).
\end{aligned}$$

Esto muestra la compatibilidad existente entre ${}_aD_x^{-1}f(x)$ y la integral de *Riemann*
En general, tenemos que:

$$ {}_{-\infty}D_x^{-m} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} e^{-khD}. $$

Si $h = \frac{x-a}{N}$ entonces:

$$ {}_{-\infty}D_x^{-m}f(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N}{x-a}\right)^m \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{m}{k} f\left(x - k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right). $$

Recordemos la siguiente identidad

$$ {}_aD_x^{-1}f(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi = \lim_{N\to\infty} \sum_{K=0}^{N-1} f\left(x - k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right)\frac{x-a}{N}. $$

Queremos construir una identidad análoga para ${}_aD_x^m f(x)$, donde m es un entero negativo.
Con este propósito en mente, recordamos que para m entero positivo tenemos que:

$$ {}_aD_x^m f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{m}{n} e^{-khD} f(x). $$

Si $h = \frac{x-a}{N}$ entonces.

$$ {}_aD_x^m f(x) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{N}{x-a}\right)^m \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)} f\left(x - k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right). $$

Sea m es un entero negativo y $n = -m$.
Notemos que:

$$ \begin{aligned} (-1)^k \binom{m}{k} &= (-1)^k \frac{m(m-1)(m-2)\cdots 1}{k!(m-k)!} \\ &= (-1)^k \frac{m(m-1)(m-2)\cdots m-k+1}{k!}. \\ &= (-1)^k \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots -n-k+1}{k!}. \\ &= (-1)^k \frac{(-1)^k[n(n+1)(n+2)\cdots n+k+1]}{k!}. \\ &= (-1)^{2k} \frac{n(n+1)(n+2)\cdots n+k+1}{k!}. \\ &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \\ &= \binom{n+k-1}{k} = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n)}. \end{aligned} $$

Luego

$$ {}_aD_x^{-n}f(x) = \lim_{N\to\infty.} \left(\frac{x-a}{N}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right). $$

Esta identidad fue deducida por *Grunwald* y E.L Post en 1867 (ver [10]) y fue muy importante en el cálculo de la derivada negativa, evitando el uso de la integrales iteradas, sin desconocer que el cálculo del limite puede ser muy difícil.

Nuestro própósito en este trabajo es deducir una fórmula para calcular ${}_aD_x^v f(x)$, donde $v \in \mathbb{R}$.

3.1. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Notemos que para $n = -2$ tenemos que:

$$ {}_aD_x^{-2}f(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f\left(x - k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right). \tag{3.5} $$

De otro lado, usando el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) habíamos deducido que:

$$ {}_aD_x^{-2}f(x) = \int_a^x \int_a^{\xi'} f(\xi)d\xi d\xi'. \tag{3.6} $$

Lo que nos permite afirmar que (3.5) y (3.6) son equivalentes. En efecto lo son.
Las identidades (3.5) y (3.6) nos permiten determinar un mecanismo para expresar integrales iteradas como una sola integral. Para ello, necesitamos el siguiente teorema (ver [20]):
Teorema 3.1. *(Regla de Leibniz)*
Sean $\Psi_1, \Psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciales, tales que:

$$ \frac{d}{dx}\int_{\Psi_2(x)}^{\Psi_1(x)} f(x,y)dy = f(x,\Psi_2(x))\Psi_2'(x) - f(x,\Psi_1(x))\Psi_1'(x) + \int_{\Psi_2(x)}^{\Psi_1(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy. $$

Demostración. Supongamos que $\int f(x,y)dy = F(x,y)$. Por *Teorema Fundamental del Cálculo* tenemos que $\dfrac{dF(x,y)}{dy} = f(x,y)$. Así,

$$ \begin{aligned} \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x,y)dy =&\ F(x,y)|_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} \\ &= F(x,\Psi_2(x)) - F(x,\Psi_1(x)). \end{aligned} $$

Aplicando $\frac{d}{dx}$ y utilizando regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x,y)dy &= \frac{d}{dx}F(x,\Psi_2(x)) - \frac{d}{dx}F(x,\Psi_1(x))\\ &= \frac{\partial F(x,\Psi_2(x))}{dx} + \frac{\partial F}{dy}\Psi_2'(x) - \frac{\partial F(x,\Psi_1(x))}{dx} - \frac{dF}{dy}\Psi_1'(x).\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial F}{dy} = f(x,y)$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x,y)dy &= \frac{\partial}{dx}F(x,\Psi_2(x)) + f(x,\Psi_2(x)).\Psi_2'(x)\\ &\quad - \frac{\partial}{dx}F(x,\Psi_1(x)) - f(x,\Psi_1(x)).\Psi_1'(x).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x,y)dy &= f(x,\Psi_2(x)).\Psi_2'(x) - f(x,\Psi_1(x)).\Psi_1'(x)\\ &\quad + \left[\frac{\partial F(x,\Psi_2(x))}{dx} - \frac{\partial F(x,\Psi_1(x)}{dx}\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sea $G(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}f(x,y).\end{aligned}$$

así, $G(x,y) = \int \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy$.
Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy &= G(x,\Psi_2(x)) - G(x,\Psi_2(x))\\ &= \frac{\partial}{\partial x}F(x,\Psi_2(x)) - \frac{\partial}{\partial x}F(x,\Psi_1(x)).\end{aligned}$$

Así, (3.7) quedaría:

$$\frac{d}{dx}\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x,y)dy = f\left(x,\Psi_2(x)\right).\Psi_2'(x) - f\left(x,\Psi_1(x)\right).\Psi_1'(x) + \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy.$$

□

De la Regla de Leibniz, tenemos que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x w(x,y)f(y)dy = w(x,x)f(x) + \int_a^x \frac{\partial w(x,y)}{\partial(x)}f(y)dy,$$

donde $w(x,y) = x - y$. Así $w(x,x) = 0$ y $\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 1$.

Tenemos entonces que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-y)f(y)dy = \int_a^x f(y)dy.$$

Inductivamente tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x (x-y)^2 f(y)dy &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\int_a^x (x-y)^2 f(y)dy\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(w(x,x)f(x) + \int_a^x 2(x-y)f(y)dy\right).\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x (x-y)^2 f(y)dy = 2\frac{d}{dx}\int_a^x (x-y)f(y)dy = 2\int_a^x f(y)dy.$$

Luego,

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x (x-y)f(y)dy = 2!\int_a^x f(y)dy.$$

Análogamente.

$$\frac{d^3}{dx^3}\int_a^x (x-y)^3 f(y)dy = 3!\int_a^x f(y)dy.$$

En general, tenemos:

Teorema 3.2. *Para $n \in \mathbb{N}$, entonces:*

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-y)^n f(y)dy = n!\int_a^x f(y)dy. \tag{3.8}$$

Demostración. Si $n = 1$ entonces,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-y)f(y)dy = \int_a^x f(y)dy.$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = k$. Debemos demostrar que se cumple para $k+1$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \int_a^x (x-y)^{k+1} f(y)dy &= \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{d}{dx}\int_a^x (x-y)^{k+1} f(y)dy\right] \\
&= \frac{d^k}{dx^k}\left[w(x,x)(k+1)\int_a^x (x-y)^k f(y)dy\right] \\
&= (k+1)\frac{d^k}{dx^k}\left[\int_a^x (x-y)^k f(y)dy\right] \\
&= (k+1)k!\left(\int_a^x f(y)dy\right) \\
&= (k+1)!\left(\int_a^x f(y)dy\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple para $n+1$. Es decir.

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-y)^n f(y)dy = n!\int_a^x f(y)dy, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Este teorema se le debe a Oldham, Spanier [14] quienes publicaron este resultado en 1936 en la revista *Diferencial* & *Integral Calculus*.
De la identidad (3.8) tenemos que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-y)f(y)dy = \int_a^x f(y)dy.$$

Así, se motiva

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\int_a^x f(y)dy = \int_a^x (x-y)f(y)dy.$$

Luego,

$$\int_a^x \int_a^{y'} f(y)dydy' = \int_a^x (x-y)f(y)dy.$$

Análogamente, se puede verificar que,

$$\int_a^x \int_a^{y''} \int_a^{y'} f(y)dydy'dy'' = \frac{1}{2!}\int_a^x (x-y)^2 f(y)dy.$$

En general para n integrales iteradas tenemos.

$$\int_a^x \int_a^{y^n} \int_a^{y^{n-1}} \cdots \int_a^y f(y')dy'dy'' \cdots dy_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-y)^{n-1} f(y)dy.$$

Así, hemos logrado una fórmula para las derivadas negativas, es decir si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$ {}_aD_x^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-y)^{n-1}f(y)dy. \tag{3.9} $$

La esencia para calcular una derivada fraccionaria está en la fórmula (3.9).
De la fórmula (3.9), podemos definir la derivada fraccionaria de la siguiente manera:
Definición 3.1. *Para* $\nu > 0$,

$$ {}_aD_x^{-\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^x (x-y)^{\nu-1}f(y)dy. $$

Si $m > 0$ entonces ${}_aD_x^{m-\nu}f(x) \quad = \quad {}_aD_x^m \cdot_a D_x^{-\nu}f(x)$.

Ejemplo Calcular ${}_aD_x^{1/2}f(x)$.

Notemos que

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^{1/2}f(x) &= D^1 D^{-1/2}f(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_a^x (x-y)^{-1/2}f(y)dy\right). \end{aligned} $$

Si $f(x) = 1$, entonces

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^{1/2}(1) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_a^x \frac{dy}{\sqrt{x-y}}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{x-a}}{\sqrt{\pi}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(x-a)}}. \end{aligned} $$

Notemos que la derivada de una constante no es cero. Este es uno de los inconvenientes en el momento de resolver una ecuación diferencial fraccionaria. Esto hizo necesario cambiar la derivada fraccionaria de tal manera que la nueva derivada fuera consistente con la derivada de una constante. Fue Caputo el autor de la nueva definición, que más adelante mencionaremos.

Ahora, si $a = 0$, entonces:

$$ D_x^{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}. $$

En lo que sigue, asumiremos que $D^{-\nu} = \ _0D_x^{-\nu}$.
Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} D^{-\nu}(1) &= \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-y)^{\nu-1}dy \\ &= \frac{1}{\nu\Gamma(v)}x^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}x^{\nu}, \quad \nu > 0. \end{aligned}$$

Si $0 < \mu < 1$, entonces:

$$\begin{aligned} D^{\mu}(1) &= D^1\left(D^{-(1-\mu)}1\right) \\ &= D^1\left(\frac{1}{\Gamma(2-\mu)}x^{1-\mu}\right). \end{aligned}$$

Puesto que $\Gamma(2-\mu) = (1-\mu)\Gamma(1-\mu)$

$$D^{-\mu}(1) = \frac{1-\mu}{\Gamma(2-\mu)}x^{-\mu} = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}x^{-\mu}.$$

Si $0 < \mu < 2$, entonces:

$$\begin{aligned} D^{\mu}(1) &= D^2\left(D^{-(2-\mu)}1\right) \\ &= D^2\left(\frac{1}{\Gamma(3-\mu)}x^{2-\mu}\right) \\ &= D\left(\frac{2-\mu}{\Gamma(3-\mu)}x^{1-\mu}\right) \\ &= \frac{(2-\mu)(1-\mu)}{\Gamma(3-\mu)}x^{-\mu} \\ &= \frac{(2-\mu)(1-\mu)}{(2-\mu)(1-\mu)\Gamma(1-\mu)}x^{-\mu} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}x^{-\mu}. \end{aligned}$$

Lo anterior nos permite afirmar que: Para $\mu \geq 0$ tenemos que $D^{\mu}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}x^{-\mu}$. Si $\mu \in \mathbb{N}$ entonces $D^{\mu}1 = 0$ ya que $\Gamma(1-\mu) = \infty$.
En lo que sigue definimos:

$$D^{-\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-y)^{(\nu-1)}f(y)dy, \quad \nu > 0, \quad a = 0,$$

como la transformada integral fraccional.
Comentario. Esta transformada tiene similitud con la transformada de *Hilbert*.

$$H(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-y)^{-1}f(y)dy.$$

Capítulo 4

Propiedades de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

En este capítulo, presentamos algunas propiedades de la derivada fraccionaria (ver [15]).
Definición 4.1. *(Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville)*
Sea $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$, $v \geq 0$.
La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $-v$, con $v \geq 0$ de la función $f(x)$ sobre $[0, x]$ es:

$$
{}_0D_x^{-v} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(v)} \displaystyle\int_0^x (x-y)^{v-1} f(y) dy & si \quad v > 0 \\ \\ f(x) & si \quad v = 0. \end{cases}
$$

Comentarios

- Se puede verificar que para $v \in \mathbb{N}$, las integrales iteradas coinciden con la integral usual.
- Los limites 0 y x de la integral son llamados terminales.
- Si el intervalo de integración es (-$\infty, x]$, entonces ${}_{-\infty}D_x^{-v} f(x)$ es llamada la derivada fraccionaria de Liouville.
- Si el intervalo de integración es $[x, \infty)$, entonces ${}_xD_\infty^{-v} f(x)$ es llamada la derivada fraccionaria de Weyl.
- Si el intervalo de integración es $[0, x]$ ${}_aD_x^{-v} f(x)$ es llamada la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.
- El operador D^{-v}, $v > 0$ nos sirve para cálcular la derivada de la función. Para facilitar la notación, escribiremos $D^{-v} f(x)$ en lugar de ${}_aD_x^{-v} f(x)$.

Teorema 4.1. *(Linealidad). El operador D^{-v} es lineal.*

Demostración. Por la linealidad de la integral, es evidente que

$$D^{-v}(f+g) = D^{-v}f + D^{-v}g$$

y

$$D^{-v}(\alpha f) = \alpha D^{-v}f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto $D^{-v}f$ es lineal. □

Teorema 4.2. *(Propiedad de semigrupo). Sean $v > 0$, $u > 0$ entonces $D^{-v}D^{-u} = D^{-(v+u)}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
D^{-v}(D^{-u}f(x)) &= D^{-v}\left[\frac{1}{\Gamma(u)}\int_0^x (x-y)^{u-1}f(y)dy\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(u)}D^{-v}\left(\int_0^x (x-y)^{u-1}f(y)dy\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(u)}\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-s)^{v-1}\int_0^s (s-y)^{u-1}f(y)dyds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)}\int_0^x (x-s)^{v-1}\int_0^s (s-y)^{u-1}f(y)dyds \\
&= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)}\int_0^x\int_0^s (x-s)^{v-1}(s-y)^{u-1}f(y)dyds.
\end{aligned}$$

Cambiando el orden de la integración tenemos que:

$$\begin{aligned}
D^{-v}(D^{-u}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)}\int_0^x\int_y^x (x-s)^{v-1}(s-y)^{u-1}f(y)dsdy \\
&= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)}\int_0^x f(y)\int_y^x (x-s)^{v-1}(s-y)^{u-1}dsdy. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Notemos que la integral $\displaystyle\int_y^x (x-s)^{v-1}(s-y)^{u-1}ds$ le podemos hacer un cambio de variable $w = \dfrac{s-y}{x-y}$, donde $dw = \dfrac{ds}{x-y}$. Así $ds = (x-y)dw$ y $w(y) = 0 \leq w \leq w(x) = 1$. Luego, esta integral quedaría:

$$\int_y^x (x-s)^{v-1}(s-y)^{u-1}ds = \int_1^0 (x-s)^{v-1}(s-y)^{u-1}dw. \qquad (4.2)$$

Notemos que: $x - s = (1-u)(x-y)$.
La integral (4.2) quedaría.

$$\begin{aligned}
\int_y^x (x-s)^{v-1}(s-y)^{u-1}ds &= \int_0^1 (1-w)^{v-1}(x-y)^{v-1}w^{u-1}(x-y)^{u}dw \\
&= (x-y)^{u+v-1}\int_0^1 (w)^{u-1}(1-w)^{v-1}dw.
\end{aligned}$$

Recordemos que $\int_0^1 (w)^{u-1}(1-w)^{v-1}dw = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$. Luego,

$$\int_y^x (x-s)^{v-1}(s-y)^{u-1}ds = (x-y)^{u+v-1}\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{4.3}$$

Al sustituir la identidad (4.3) en (4.1) tenemos:

$$\begin{aligned} D^{-v}(D^{-u}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(v)}\int_0^x f(y)(x-y)^{u+v-1}\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(u+v)}\int_0^x f(y)(x-y)^{u+v-1}dy \\ &= D^{-(u+v)}f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $D^{-v}(D^{-u})= D^{-(v+u)}$. □

Teorema 4.3. *(Conmutatividad). Sea $u, v \geq 0$ entonces $D^{-v}D^{-u} = D^{-u}D^{-v}$.*

Demostración. Por la propiedad del semigrupo tenemos que:

$$\begin{aligned} D^{-v}(D^{-u}f(x)) &= D^{-(v+u)}f(x) \\ &= D^{-(u+v)}f(x) \\ &= D^{-u}(D^{-v}f(x)). \end{aligned}$$

Por tanto $D^{-v}D^{-u} = D^{-u}D^{-v}$. □

Teorema 4.4. *(Continuidad con respecto a v). Sea f una función análitica en $x > 0$ el operador $D^{-v}f(x)$ es continua con respecto a $v > 0$. Es decir:*

$$\lim_{\mu\to v} D^{-\mu}f(x) = D^{-v}f(x). \tag{4.4}$$

Demostración. Si $h = \mu - v$ entonces (4.4) toma la forma :

$$\lim_{h\to 0} D^{-(h+v)}f(x) = D^{-v}f(x).$$

Por la propiedad del semigrupo tenemos que:

$$\lim_{h\to 0} D^{-h}D^{-v}f(x) = D^{-v}f(x). \tag{4.5}$$

Sea $F(x)= D^{-v}f(x)$. Así (4.5) toma la forma.

$$\lim_{h\to 0} D^{-h}F(x) = F(x).$$

Lo anterior, nos muestra que $D^{-v}f(x)$ es continuo con respecto a v, basta verificar que.

$$\lim_{v\to 0} D^{-v}f(x) = f(x).$$

Recordemos que si f es analítica en $[0,\infty)$ entonces existe una vecindad V de $y \in [0,\infty)$, donde existe una serie de potencia, tal que:

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!}(y-x)^k \text{ donde } x \in V. \text{ Aquí } D^0 f(x) = f(x).$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}
D^{-v} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} f(y) dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^{x'} (x-y)^{v-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!}(-1)^k (x-y)^k dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!}(-1)^k \int_0^x (x-y)^{v+k-1} dy.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
D^{-v} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!}(-1)^k (-1) \left. \frac{(x-y)^{v+k}}{v+k} \right|_0^x \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{D^k f(x)}{k!} \left(0 - \frac{x^{v+k}}{v+k} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} \frac{D^k f(x)}{k!} \frac{x^{v+k}}{v+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} \frac{D^k f(x)}{k! v\Gamma(v) + k\Gamma(v)} x^{v+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} \frac{D^k f(x)}{k!\Gamma(v+1) + k\Gamma(v)} x^{v+k} \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Notemos que $\lim\limits_{v \to 0} \Gamma(v) = \infty$. Luego,

$$\frac{D^k f(x)}{\Gamma(v+1) + k\Gamma(v)} = 0 \quad \text{con } k \neq 0 \ .$$

La última parte de la sumatoria (4.6) que toma un valor distinto de 0 es cuando $k = 0$. Así,

$$\lim_{v \to 0} D^{-v} f(x) = \lim_{v \to 0} \frac{(-1)^{0+2} D^0 f(x)}{\Gamma(v+1) + 0} x^v = f(x),$$

ya que $\lim\limits_{v \to 0} \Gamma(v+1) = 1$.

Por tanto, el operador D^{-v} es continuo con respecto a v. □

Teorema 4.5. *(Existencia de la derivada fraccionaria). Sea f una función continua en $[0, \infty)$ y $v, x > 0$, entonces $D^{-v} f(x)$ existe, para todo $x > 0$.*

Demostración. Sea la función $g(y) = -\dfrac{(x-y)^v}{\Gamma(v+1)}, \quad 0 \leq y \leq x.$
Derivando tenemos que:

$$g'(y) = \frac{v(x-y)^{v-1}}{\Gamma(v+1)} = \frac{v(x-y)^{v-1}}{v\Gamma(v)} = \frac{(x-y)^{v-1}}{\Gamma(v)}.$$

Como $x - y \geq 0$ y $v > 0$ entonces $g'(y) > 0$. Luego la función es creciente en $[0, x]$.
De lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} D^{-v} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} f(y) dy \\ &= \int_0^x f(y) g'(y) dy. \end{aligned}$$

Como $g'(y) \geq 0$ en $[0, x]$ entonces $g'(y)$ es acotada $[0, x]$; además f es continua en $[0, x]$.
Esto significa que

$$\int_0^x f(y) g'(y) dy \quad \text{existe.}$$

Por tanto $D^{-v} f(x)$ existe, para todo $x > 0$. $\square$

Definición 4.2. $L_1(a,b) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \int_a^b |f(t)| dt < \infty \right\}.$

Recordemos que $L_1(a,b)$ es un espacio métrico completo, donde $||f||_{L_1(a,b)} = \int_a^b |f(t)| dt.$
Definición 4.3. *(Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en $L_1(a,b)$)*
Sea $f \in L_1(a,b)$ y $\alpha > 0$.

$$D^{\alpha} f(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy,$$

es llamada la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.
Definición 4.4. *(Convolución). Sean $f, g \in L^1(a,b)$. La convolución de f y g se denota $f \times g$ y se define como:*

$$(f \times g)(t) = \int_a^b f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

El intervalo de integración puede cambiar dependiendo del dominio donde estén definidas las funciones. En el caso de un rango de integración finito f y g se consideran extendidas periódicamente en ambas direcciones.
La convolución se encuentra en muchas aplicaciones, como la teoría de la probabilidad, óptica, acústica, ingenería electrica y electronica, física ,etc.
Es evidente la siguiente propiedad.

Teorema 4.6. *Sean $D^\alpha f(t)$ es la derivada de Riemann-Liouville*

entonces

$$D^\alpha f(t) = (\Phi \times f)(t),$$

donde

$$\Phi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Teorema 4.7.

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)(s) = s^{-\alpha}.$$

Aquí $\mathcal{L}$ es la transformación de Laplace. Recordemos que

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\right)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}(t^{\alpha-1})(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha-1}dt. \qquad (4.7)\end{aligned}$$

Ahora, si $u = st$ entonces $du = sdt$.
Luego (4.7) toma la forma

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\right)(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)s^\alpha}\int_0^\infty e^{-u}t^{\alpha-1}du = s^{-\alpha}.$$

ya que $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-u}t^{\alpha-1}du.$ □

Lo anterior, nos permite encontrar una estrecha relación entre la transformada de Laplace y la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.
Teorema 4.8. *$\mathcal{L}(D^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s)$, donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D^\alpha f(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(D^\alpha f(t))dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}e^{-st}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)dtd\tau.\end{aligned}$$

Ahora, si $T = t - \tau$ entonces la integral $\displaystyle\int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-st}(t-\tau)^{\alpha-1}dt$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-st}(t-\tau)^{\alpha-1}dt &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-s(T+\tau)}T^{\alpha-1}dT \\
&= e^{-s\tau}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-sT}T^{\alpha-1}dT.
\end{aligned}$$

Por Teorema (4.7) tenemos:

$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-st}(t-\tau)^{\alpha-1}dt = e^{-s\tau}s^{-\alpha}.$$

Así, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(D^{\alpha}f(t))(s) &= \int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}s^{-\alpha}dT \\
&= s^{-\alpha}\mathcal{L}(f(t))(s) \\
&= s^{-\alpha}F(s).
\end{aligned}$$

□

Recordemos que:

$$\mathcal{L}(D^{m}f(x))(s) = s^{m}L(f)(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{m-k}D^{k-1}f(0).$$

Ahora, si $\alpha > 0$ y $m-1 < \alpha < m$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(D^{\alpha}f(t))(s) &= \mathcal{L}(D^{m}D^{\alpha-m}f)(s) \\
&= s^{m}\mathcal{L}(D^{\alpha-m}f)(s) - \sum_{k=1}^{m-1} s^{k}D^{m-1-k}f(0).
\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que:

$$\mathcal{L}(D^{m}f(x))(s) = s^{\alpha}\mathcal{L}(f(t))(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{k}D^{\alpha-1-k}f(0).$$

En esta identidad, las condiciones iniciales que se requieren son de orden fraccionario. En la modelación de problemas, las condiciones iniciales siempre son derivadas enteras, lo que hace necesario modificar la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. Lo que abre las puertas para una linea de investigación llamada: *Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias*, para ello es necesario estudiar la *Derivada Fraccionaria de Caputo*(Para más información ver las referencias [10], [9] y [15]).
La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en el desarrollo teórico del cálculo fraccionario se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Pero al tratar

de hacer modelaciones matemáticos de fenomenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales, las cuales deberían ser también de orden fraccionario. Como consecuencia de esto, se hace necesario modificar la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. La derivada fraccionaria de Caputo, en contraste, emplea como condiciones iniciales, derivadas de orden entero, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables a la manera tradicional.
Su definición, representó un notable avance práctico en el estudio de fenómenos físicos.
La definición de derivada fraccionaria de Caputo, es la siguiente:
Definición 4.5. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in C^n_{[a,b]}$, con $n = Re(\alpha) + 1$. la derivada fraccionaria de Caputo de orden α de f se define como:*

$$\left({}^cD^\alpha_a f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \qquad x > a.$$

donde $f^{(n)}$ es la n-ésima derivada usual de f.
Observación. Al contrario de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, en la que primero se integra y luego se deriva, en la derivada de Caputo primero derivamos (n-veces) y luego integramos. En consecuencia, es una definición más restrictiva, ya que requiere la integrabilidad de f^n.
Las derivadas de Caputo y Riemann-Liouville son buenas generalizaciones de la derivada ordinaria, en el sentido de que respeta los valores de las derivadas enteras usuales, concordando así entre ellas. Pero en el caso no entero no coinciden, como se evidencia en el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].
Teorema 4.9. *Sea $\alpha \notin \mathbb{N}$ $\quad (Re(\alpha) \geq 0), \quad n = Re(\alpha) + 1, \quad f \in L^1[a,b]$ una función para la que existen las derivadas fraccionarias de Caputo $({}^cD^\alpha_a f)$ y Riemann-Liouville $(D^\alpha_a f)$. Entonces se tiene la siguiente relación.*

$$({}^cD^\alpha_a f)(x) = D^\alpha_a f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad x > a.$$

Se puede notar que para ordenes de derivación no entera, las derivadas de Caputo y Riemann-Liouville coinciden cuando $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{n-1}(a) = 0$.
De otro lado, se puede evidenciar que la derivada fraccionaria de Caputo de una constante es cero, mientras que la derivada de Riemann-Liouville de un constante en general no es cero.
La derivada de Caputo puede considerarse como una regularización de la derivada de Riemann-Liouville.
En general existen otras generalizaciones de la derivada clásica que son objeto de estudio.

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo mostraremos algunas aplicaciones de la derivada fraccionaria. En la actualidad la derivada fraccionaria tiene aplicaciones en diversos campos, entre los cuales podemos mencionar.

1. Física (reología).
2. Fluidos.
3. Redes eléctricas.
4. Teoría de difusión.
5. Electromagnetismo.
6. Probabilidad y Estadística.
7. Eléctroquimica.
8. Teoría del Caos.

Problema de Tautócrona

Sea m una masa que se desliza bajo el efecto de la gravedad por una cuerda sin rozamiento. Supongamos que $x(y)$ describe la trayectoria. Por conveniencia, suponemos que $x(0) = 0$ es el final de la cuerda.

Utilizando la ley de la conservación de la energía, se deduce que $v^2(y) = 2g(h - y)$, donde $v(y)$ es la velocidad en la altura y, donde $0 \leq y \leq h$, h es la altura ($h > 0$) de donde se suelta el objeto de masa m.
Sea $s(y)$ la longitud de arco sobre la cuerda, desde el origen a un punto $(x(s),y(s)) = (x(y), y)$.

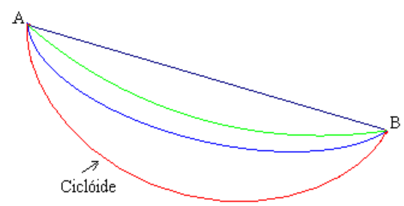

Figura 0.1: Descripción de las distintas trayectorias que puede recorrer el objeto.

Sabemos por cálculo que $s(y_0) = \displaystyle\int_0^{y_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$

Se conoce que:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{ds}{dt} \\ &= -\frac{ds}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{(Regla de la cadena)} \\ &= \sqrt{2g(h-y)}. \end{aligned}$$

Luego,

$$-s'(y)\frac{dy}{dt} = \sqrt{2g(h-y)},$$

de donde

$$dt = -\frac{s'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}} dy.$$

Si queremos cálcular el tiempo total que demora la masa en recorrer toda la trayectoria, debemos integrar en el intervalo $[0, h]$. Así,

$$\int_0^h dt(y)dy = \int_0^h \frac{-s'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}} dy.$$

Luego,

$$\begin{aligned} t(y)\Big|_0^h &= -\int_0^h \frac{s'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}} dy \\ t(h) - t(0) &= -\int_0^h \frac{s'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}} dy. \end{aligned}$$

Así,

$$t(0)-t(h)=\int_0^h \frac{s'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}}dy. \tag{5.1}$$

Luego (5.1) toma la forma:

$$\mathcal{T}(h)=\int_0^h \frac{s'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}}dy,$$

donde $\mathcal{T}(h)=t(0)-t(h)$ y $\mathcal{T}(h)$ es el tiempo de descenso.
Es evidente que el tiempo del descenso depende de la altura.
El problema del tautócrona consiste en hallar una curva con la propiedad de que el tiempo de descenso no dependa de la altura h; es decir, que el tiempo del descenso sea el mismo, sin importar que altura se suelte el objeto de masa m. Parece absurdo que esto pueda suceder, pues las longitudes de arco son distintas para alturas distintas.
Supongamos que $\mathcal{T}(h)$ no depende de h. Es decir, supongamos que $\mathcal{T}(h)=\mathcal{T}>0$.
Entonces

$$\mathcal{T}=\int_0^h \frac{s'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}}dy. \tag{5.2}$$

Así, (5.2) toma la forma

$$\sqrt{2g}\mathcal{T}=\int_0^y (y-z)^{-1/2}s'(z)dz. \tag{5.3}$$

La fórmula (5.3) fué presentada por primera vez por *Abel* en 1823.

De la ecuación (5.3) tenemos que:

$$\sqrt{2g}\mathcal{T}=\Gamma(1/2)\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^y (y-z)^{-1/2}s'(z)dz. \tag{5.4}$$

Aquí, es importante recordar la derivada de *Riemann* $-$ *Liouville*.

$$D^{-v}f(x)=\frac{1}{\Gamma(v)}\int_a^x (x-y)^{v-1}f(y)dy. \tag{5.5}$$

Usando la identidad (5.5) en (5.4) tenemos que :

$$\sqrt{2g}\mathcal{T}=\Gamma(1/2)_0D_y^{-1/2}(s'(y)).$$

Así,

$$D^{-1/2}(s'(y)) = \frac{\sqrt{2g}\mathcal{T}}{\sqrt{\pi}},$$

ya que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Luego,

$$s'(y) = D^{-1/2}k, \quad \text{donde } k = \sqrt{\frac{2g\mathcal{T}^2}{\pi}}.$$

Aplicando la identidad $D^{-1/2}(1) = \sqrt{\frac{1}{\pi y}}$ tenemos que:

$$s'(y) = k\sqrt{\frac{1}{\pi y}} = \sqrt{\frac{2g\mathcal{T}^2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\pi y}}.$$

Así,

$$s'(y) = \sqrt{\frac{2g\mathcal{T}^2}{\pi^2}y^{-1/2}}.$$

Luego $s'(y) = Ay^{-1/2}$, donde A=$\sqrt{2g\left(\frac{\mathcal{T}}{\pi}\right)^2}$.

Integrando tenemos,

$$\int_0^y s'(r)dr = \int_0^y Ar^{-(1/2)}dr.$$

Así,

$$s(y) - s(0) = 2Ay^{1/2}$$

Como $s(0) = 0$, entonces,

$$s(y) = 2Ay^{1/2}.$$

De otro lado, como:

$$s(y) = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

entonces

$$s'(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = Ay^{-1/2}.$$

Luego,

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = A^2 y^{-1}.$$

Así,

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{A^2 y^{-1} - 1}.$$

Luego,

$$dx = \sqrt{A^2 y^{-1} - 1} dy.$$

Así,

$$x(y) = \int_0^y \sqrt{A^2 z^{-1} - 1} dz, \tag{5.6}$$

donde $x(0) = 0$.

Sea $z = A^2 sen^2(\varphi)$, entonces $dz = 2A^2 sen(\varphi) cos(\varphi) d\varphi$.

La fórmula (5.6) toma la forma:

$$\begin{aligned} x(y) &= 2A^2 \int_0^\beta cos^2\varphi d\varphi, \qquad \text{donde } \beta = arcsen\sqrt{\frac{y}{A^2}}. \\ &= A^2\left(\beta + \frac{1}{2} sen(2\beta)\right). \end{aligned}$$

Sea $\theta = 2\beta$ y $R = \dfrac{1}{2}A^2$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} x(y) &= A^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} sen(\theta)\right) \\ &= \frac{A^2}{2}(\theta + sen(\theta)) \\ &= R(\theta + sen(\theta)). \end{aligned}$$

Así,

$$x(y) = x(\theta) = R(\theta + sen(\theta)). \tag{5.7}$$

De otro lado,

$$\beta = arcsen\sqrt{\frac{y}{A^2}} = \frac{\theta}{2}.$$

Así,

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{y}{A^2}}.$$

Luego,

$$y = A^2 sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Así,

$$y = \frac{A^2}{2}(1 - cos(\theta)) = R(1 - cos(\theta)).$$

Así, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x(\theta) & = R(\theta + sen(\theta)) \\ y(\theta) & = R(1 - cos(\theta)) \end{cases}.$$

El cual corresponde a la parametrización de una cicloide generada. Cuando un circulo rueda sobre una cuerda horizontal de longitud $2R$.
Esta es la curva que buscabamos (Para más información ver[10]).

Segunda aplicación de la derivada fraccionaria: Modelo ecuación de calor (ecuación de difusión)

La ecuación del calor es de una importancia fundamental en numerosos y diversos campos de la ciencia. En el ámbito de las matemáticas, son las ecuaciones parabólicas en derivadas parciales por antonomasia. En el campo de la estadística, la ecuación del calor está vinculada con el estudio del movimiento browniano a través de la ecuación de Fokker–Planck. La ecuación de difusión, es una versión más general de la ecuación del calor, y se relaciona principalmente con el estudio de procesos de difusión química.
La ecuación de calor es:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = a\Delta\psi(x,t), \quad \text{donde } a > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \Delta\psi(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x_i^2}.$$

La ecuación de calor unidimensional es:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{a\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Es evidente que el problema de Cauchy.

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{tiene solución } \psi(x,t) = e^{at}x_0.$$

Formalmente, la solución del problema de Cauchy.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{tiene solución} \quad \psi(x,t) = e^{atD^2}\psi_0(t), \\ \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \end{cases} , \tag{5.8}$$

donde $D^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ la consideramos una constante con respecto a la variable t.

Calculemos e^{atD^2}.
Para ello, recordemos la identidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}. \tag{5.9}$$

Para probar esta identidad hacemos el siguiente arreglo:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= \frac{a}{a}(ax^2 + 2bx + c) \\ &= \frac{(ax)^2 + 2abx + ac}{a} \\ &= \frac{(ax)^2 + 2abx + b^2 - b^2 + ac}{a} \\ &= \frac{(ax)^2 + 2abx + b^2}{a} - \frac{b^2 - ac}{a} \\ &= \frac{(ax+b)^2}{a} - \frac{b^2 - ac}{a}. \end{aligned}$$

Por lo que la identidad (5.9) queda de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(ax+b)^2}{a} - \frac{b^2-ac}{a}\right)}dx.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{(ax+b)^2}{a}\right)}e^{\left(\frac{b^2-ac}{a}\right)}dx \\ &= e^{\left(\frac{b^2-ac}{a}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{(ax+b)^2}{a}\right)}dx \\ &= e^{\left(\frac{b^2-ac}{a}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right)^2}dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable: $u = \frac{ax+b}{\sqrt{a}}$ tenemos $\frac{du}{\sqrt{a}} = dx$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx &= e^{\left(\frac{b^2-ac}{a}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2)} \frac{du}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\left(\frac{b^2-ac}{a}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

Aplicando la integral de Gauss (2.3) se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\left(\frac{b^2-ac}{a}\right)} \sqrt{\pi}.$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\left(\frac{b^2-ac}{a}\right)}.$$

Notemos que de la identidad (5.9) tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{4at}x^2 - xD)}dx = \sqrt{4\pi at}\, e^{atD^2}.$$

Así,

$$e^{atD^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4at}u^2 - uD} du. \tag{5.10}$$

Por la identidad de Taylor $e^{\alpha D} f(x) = f(x+\alpha)$, tenemos que

$$e^{atD^2} \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4at}u^2} \psi_0(x-u) du. \tag{5.11}$$

Así, la solución al problema de Cauchy (5,8) toma la forma.

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4at}u^2} \psi_0(x-u) du. \tag{5.12}$$

Sea $g(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi at}}\ e^{-\frac{1}{4at}x^2}$.
Así,

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u,t) \psi_0(x-u) du.$$

Afirmación: La función $g(x,t)$ es solución de la ecuación de Calor y además.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)dx = 1.$$

En efecto. Sea $g(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi at}}\ e^{-\frac{1}{4at}x^2}$.
Luego,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-\frac{1}{4at}x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4at}x^2} dx.\end{aligned}$$

Aplicando la integral de Gauss (2.3) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\sqrt{4\pi at}.$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)dx = 1.$$

De otro lado, podemos escribir la ecuación de la forma.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{5.13}$$

Si consideramos a $\dfrac{\partial}{\partial t}$ como una constante entonces (5.13) es una ecuación lineal homogénea, cuya solución tiene la forma $\psi(x,t) = Ae^{-bx\sqrt{p}} + Be^{bx\sqrt{p}}$, donde $p = \dfrac{\partial}{\partial t}$ y $b = \sqrt{\dfrac{1}{a}}$.

Por conveniencia, consideramos que $B = 0$.

Así,

$$\psi(x,t) = Ae^{-bx\sqrt{p}}.$$

Dado que $p = \dfrac{\partial}{\partial t}$, estudiemos la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \ = -b\sqrt{p}\psi \ \text{,con } b > 0. \tag{5.14}$$

De la ecuación (5.14) tenemos que:

$$\frac{\partial\psi}{\psi} = -b\sqrt{p}\,\partial x,$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}\psi(x,t) = Ae^{-bx\sqrt{p}} = Ae^{-bxp^{(1/2)}} &= Ae^{-bx\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(1/2)}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-bx)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n/2} A. \qquad (5.15)\end{aligned}$$

Notemos que si n es par positivo, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n/2} A = 0$.
Así, la ecuación (5.15) toma la forma:

$$\psi(x,t) = A + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-bx)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{2n+1}{2}} A.$$

Es decir,

$$\psi(x,t) = A + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-bx)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{1/2} A.$$

Sabemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{1/2} A = A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{1/2}(1) = \frac{A}{\sqrt{\pi t}}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= A - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}\left(\frac{A}{\sqrt{\pi t}}\right) \\ &= A - \frac{A}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}(t^{-1/2}). \qquad (5.16)\end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}(t^{1/2}) = (-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2^n t^{(n+1)/2}}. \qquad (5.17)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1) &= \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2)}_{\text{2n-veces}}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!}.\end{aligned}$$

Así, la ecuación (5.17) toma la forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n (t^{1/2}) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! t^{n+1/2}}$$

y la ecuación (5.16) toma la forma:

$$\psi(x,t) = A\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{(2n)!}{2^n n! t^{n+1/2}}\right]$$

Como $(2n+1)! = (2n+1)(2n)!$ entonces,

$$\psi(x,t) = A\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}t^{n+1/2}}\right)\right] \tag{5.18}$$

Se puede verificar que

$$2\int_0^{\frac{bx}{2\sqrt{t}}} \gamma^{2n} d\gamma = \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}t^{n+1/2}} \tag{5.19}$$

De la identidad (5.18), la ecuación (5.19) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= A\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{bx}{2\sqrt{t}}} \gamma^{2n} d\gamma\right] \\
&= A\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{bx}{2\sqrt{t}}} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma^{2n} d\gamma\right] \\
&= A\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{bx}{2\sqrt{t}}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\gamma^2)^n d\gamma\right] \\
&= A\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{bx}{2\sqrt{t}}} e^{-\gamma^2} d\gamma\right],
\end{aligned}$$

luego, la función

$$\psi(x,t) = A\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{bx}{2\sqrt{t}}} e^{-\gamma^2} d\gamma\right].$$

Es una solución de la ecuación de calor, distinto a (5.12) en virtud de la derivada fraccionaria.

Capítulo 6

Conclusiones

1. La herramienta fundamental para estudiar las derivadas fraccionarias fue la función gama.
2. El teorema fundamental del cálculo es clave en la generalización de la derivada clásica.
3. La derivada de Riemann-Liouville es el primer resultado que permitió dar una definición de la derivada fraccionaria.
4. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville presenta inconvenientes puesto que al derivar una función constante el resultado es distinto de cero, por lo que es necesario recurrir a la derivada fraccionaria dada por Michelle Caputo.
5. Los modelos (Ecuaciones diferenciales fraccionarias) que aparecen, muestran la necesidad de redifinir la derivada de Riemann-Liouville: La derivada fraccionaria de Caputo.
6. El modelo Tautócrona y la ecuación de calor, ilustran la importancia de la derivada fraccionaria.
7. El cálculo fraccionario como rama matemática reciente, proporciona innumerables lineas futuras de investigación.

Bibliografía

[1] A. C. McBride and G. F. Roach [1985] Fractional Calculus, University of Stratchclyde, Glasgow, August 1984 (Pitman Advanced Publishing Program)

[2] Anton Lombardero Ozores [2014], Cálculo fraccionario y Dinámica newtoniana, Revista:Pensamiento matemático, vol. iv, número 1.

[3] A., Krug [1890], Theorie der Derivationen, Wien Denkenschr., Math. Naturwissensch. Classe, 57, 151-228.

[4] Apostol, Tom, Calculus Volumen 1, Blaisdell Publishing Company, [1984] 11

[5] Bajlekova, Emilia Grigorova [2001], Fractional Evolution Equation in Banach Space.

[6] B. Bonilla Paz, AA Kilbas [2003], Cálculo fraccionario y ecuaciones diferenciales fraccionarias, e- spacio.uned.es

[7] Caffareli Luis, Allen Marc, Vasseur Alexis [2016] A parabolic problem with a fractional time deriva- tive.

[8] Carvalho Neto,Paulo Mendes [2013], Fractional differential Equation: A novel study of local end gloval solutions in Banach Space.

[9] Kilbas , A.A, Srivastava, H.M Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam,[2006] 44, 45

[10] Miller KS, Ross, B,An introduction to the Fractional Calculus and fractional differential equations, wiley and sons, New York, [1993]. 8, 32, 44, 51

[11] Montoya Octavio, Rubio Brayan, Derivada fraccionaria, [2017] (Sin publicar).

[12] Oldham & Spanier, [1930], Generalized differentiation, Trans Amer. Math. Soc. 32, 723-781

[13] Oldham & Spanier, [1936], Differential E Integral Calculus, Volume II, p 221

[14] Oldham, K.B, Spainer J, The fractional calculus, Academic press, New york, [1974] 35

[15] Prieto Rafael, El cálculo generalizado y las funciones fraccionarias,Mexico, [2009] 38, 44

[16] R., Goren o and S. Vessella [1839], Abel Integral Equations, Springer-Verlag New York.

[17] R. S. Guillermo [2010], Introducción al Análisis Funcional, Colección libros de Texto, Universidad del Valle, Cali (Colombia)

[18] S. F. Lacroix [1819], Traité du calcul differentiel et du calcul integral, 2nd ed., Courcier, Paris, pp. 409-410

[19] Sanchez, Jose Manuel, Génesis y desarrollo del cálculo fraccional, [2011] 8

[20] Wheeler, Nicholas , Construction and physical application of the fractional calculus, [1997] 18, 26, 32

Universidad del Tolima	**PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS** **AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL**	Página 1 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Los suscritos:

Brayan Andrés Rubio	con C.C N°	1110545454
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar [x]

No Autorizar [ ] **Motivo:**

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	X	Artículo		Proyecto de Investigación	
Libro		Parte de libro		Documento de conferencia	
Patente		Informe técnico			
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del

	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 2 de 3
Universidad del Tolima		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al articulo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 ***"...Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable"*** **y 37** ***"...Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro"*****. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993,** ***"los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores"*** **y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.**

- Identificación del documento:

Título completo: PROPIEDADES DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

PROFESIONAL EN MATEMATICAS CON ENFASIS EN ESTADSTICA

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): __________

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): __________

- Artículo publicado en revista: __________

- Capítulo publicado en libro: __________

- Conferencia a la que se presentó: __________

Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 3 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: 02 Mes: marzo Año: 2018.

Autores: Firma

Nombre: Brayan Andrés Rubio Cano Brayan A. Rubio C.C. 1110543454

Nombre: C.C.

Nombre: C.C.

Nombre: C.C.

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.